Página 64

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Criterio para formar sucesiones

1 Describe el criterio con el que se forman estas sucesiones y añade tres términos a cada una:

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$

b) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \dots$

c) 2, 5, 10, 17, 26, …

d) 0, 3, 8, 15, 24, …

e) 1, 3, 6, 10, 15, …

a) Cada término lo obtenemos dividiendo 1 entre el lugar que ocupa el término:

$$a_6 = \frac{1}{6},\ a_7 = \frac{1}{7},\ a_8 = \frac{1}{8}$$

b) Cada término es la raíz cuadrada del lugar que ocupa: $a_6 = \sqrt{6}$, $a_7 = \sqrt{7}$, $a_8 = \sqrt{8}$

c) Cada término es el cuadrado del lugar que ocupa más 1 unidad: $a_6 = 37$, $a_7 = 50$, $a_8 = 65$

d) Cada término es el cuadrado del lugar que ocupa menos 1 unidad: $a_6 = 35$, $a_7 = 48$, $a_8 = 63$

e) Cada término, a partir del segundo, se obtiene sumándole al lugar que ocupa el término anterior: $a_6 = 21$, $a_7 = 28$, $a_8 = 36$

2 Escribe los cinco primeros términos de las sucesiones cuyos términos generales son estos:

a) $a_n = 3 + \frac{2}{10^n}$

b) $b_n = \frac{n^2 - 1}{n}$

c) $c_n = \frac{3n - 1}{n + 1}$

d) $d_n = 2^{-n}$

e) $e_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$

f) $f_n = \frac{(-1)^n\, n - n}{2}$

a) $a_1 = 3{,}2$; $a_2 = 3{,}02$; $a_3 = 3{,}002$; $a_4 = 3{,}0002$; $a_5 = 3{,}00002$

b) $b_1 = 0$; $b_2 = \frac{3}{2}$; $b_3 = \frac{8}{3}$; $b_4 = \frac{15}{4}$; $b_5 = \frac{24}{5}$

c) $c_1 = 1$; $c_2 = \frac{5}{3}$; $c_3 = 2$; $c_4 = \frac{11}{5}$; $c_5 = \frac{7}{3}$

d) $d_1 = \frac{1}{2}$; $d_2 = \frac{1}{4}$; $d_3 = \frac{1}{8}$; $d_4 = \frac{1}{16}$; $d_5 = \frac{1}{32}$

e) $e_1 = 1$; $e_2 = 2$; $e_3 = 6$; $e_4 = 24$; $e_5 = 120$

f) $f_1 = -1$; $f_2 = 0$; $f_3 = -3$; $f_4 = 0$; $f_5 = -5$

3 **Escribe el término general de estas sucesiones:**

a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ **b)** $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$

c) $0, \frac{3}{5}, \frac{8}{10}, \frac{15}{17}, \frac{24}{26}, \ldots$ **d) 5,1; 5,01; 5,001; 5,0001; …**

a) $a_n = \dfrac{n}{n-1}$ b) $b_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

c) $c_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$ d) $d_n = 5 + \dfrac{1}{10^n}$

4 **Construye dos sucesiones cuyas leyes de recurrencias sean las siguientes:**

a) $a_1 = 0$ $a_2 = 2$ $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$

b) $a_1 = 1$ $a_2 = 2$ $a_n = \dfrac{a_{n-1} \cdot a_{n-2}}{2}$

a) $0, 2, 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{21}{16}, \frac{43}{32}, \ldots$ b) $1, 2, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{128}, \ldots$

5 **Busca una ley de recurrencia para definir las siguientes sucesiones:**

a) 4, 7, 3, –4, –7, … **b)** $2, 3, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

a) $a_1 = 4$, $a_2 = 7$, $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ para $n > 2$

b) $b_1 = 2$, $b_2 = 3$, $b_n = \dfrac{b_{n-1}}{b_{n-2}}$ para $n > 2$

Progresiones aritméticas

6 **De las siguientes sucesiones, di cuáles son progresiones aritméticas y escribe su término general:**

a) 1,2; 2,4; 3,6; 4,8; 6; … **b) 5; 4,6; 4,2; 3,8; 3,4; …**

c) 1, 2, 4, 7, 11, … **d) 14, 13, 11, 8, 4, …**

a) Es una progresión aritmética con $a_1 = 1{,}2$ y $d = 1{,}2$.

$a_n = 1{,}2 + (n-1) \cdot 1{,}2 = 1{,}2n$.

b) Es una progresión aritmética con $b_1 = 5$ y $d = -0{,}4$.

$b_n = 5 + (n-1) \cdot (-0{,}4) = -0{,}4n + 5{,}4$.

c) y d) no son progresiones aritméticas.

7 **De las sucesiones siguientes, indica cuáles son progresiones aritméticas:**

a) $a_n = 3n$ **b)** $b_n = 5n - 4$

c) $c_n = \frac{1}{n}$ **d)** $d_n = \frac{8 - 3n}{4}$

e) $e_n = 5 + \frac{n}{2}$ **f)** $f_n = n^2 - 1$

a) $a_n - a_{n-1} = 3n - 3(n - 1) = 3n - 3n + 3 = 3$

Es una progresión aritmética con $d = 3$.

b) $b_n - b_{n-1} = 5n - 4 - [5(n - 1) - 4)] = 5n - 4 - 5n + 5 + 4 = 5$

Es una progresión aritmética con $d = 5$.

c) $c_1 = 1,\ c_2 = \frac{1}{2},\ c_3 = \frac{1}{3},\ c_4 = \frac{1}{4}, \ldots$

$c_2 - c_1 = \frac{-1}{2} \neq c_3 - c_2 = \frac{1}{6}$. No es una progresión aritmética.

d) $d_n - d_{n-1} = \frac{8 - 3n}{4} - \frac{8 - 3(n - 1)}{4} = \frac{8 - 3n - 8 + 3n - 3}{4} = \frac{-3}{4}$

Es una progresión aritmética con $d = \frac{-3}{4}$.

e) $e_n - e_{n-1} = 5 + \frac{n}{2} - \left(5 + \frac{n-1}{2}\right) = 5 + \frac{n}{2} - 5 - \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Es una progresión aritmética con $d = \frac{1}{2}$.

f) $f_1 = 0, f_2 = 3, f_3 = 8, f_4 = 15, \ldots$

$f_2 - f_1 = 3 \neq f_3 - f_2 = 5$. No es una progresión aritmética.

8 **Calcula los términos a_{10} y a_{100} de las siguientes progresiones aritméticas:**

a) –4, –2, 0, 2, 4, …

b) 2, –3, –8, –13, –18, …

c) $\frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \ldots$

a) $a_{10} = a_1 + 9d = -4 + 9 \cdot 2 = -4 + 18 = 14$

$a_{100} = a_1 + 99d = -4 + 99 \cdot 2 = -4 + 198 = 194$

b) $a_{10} = a_1 + 9d = 2 - 9 \cdot 5 = 2 - 45 = -43$

$a_{100} = a_1 + 99d = 2 - 99 \cdot 5 = 2 - 495 = -493$

c) $a_{10} = a_1 + 9d = \frac{3}{4} + 9 \cdot \frac{1}{4} = \frac{12}{4} = 3$

$$a_{100} = a_1 + 99d = \frac{3}{4} + 99 \cdot \frac{1}{4} = \frac{102}{4} = \frac{51}{2}$$

9 **Calcula la suma de los 25 primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas:**

a) 3, 6, 9, 12, 15, … **b) 5; 4,9; 4,8; 4,7; 4,6; …**

c) $c_n = 4n - 2$ **d)** $d_n = \frac{1 - 2n}{2}$

a) $a_1 = 3$; $a_{25} = a_1 + 24d = 3 + 24 \cdot 3 = 75$

$$S_{25} = \frac{(a_1 + a_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(3 + 75) \cdot 25}{2} = 975$$

b) $b_1 = 5$; $b_{25} = b_1 + 24d = 5 - 24 \cdot 0{,}1 = 2{,}6$

$$S_{25} = \frac{(b_1 + b_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(5 + 2{,}6) \cdot 25}{2} = 95$$

c) $c_1 = 2$; $c_{25} = 98$

$$S_{25} = \frac{(c_1 + c_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(2 + 98) \cdot 25}{2} = 1\,250$$

d) $d_1 = \frac{-1}{2}$; $d_{25} = \frac{-49}{2}$

$$S_{25} = \frac{(d_1 + d_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{\left(-\frac{1}{2} - \frac{49}{2}\right) \cdot 25}{2} = \frac{-625}{2} = -312{,}5$$

Progresiones geométricas

10 **De las siguientes sucesiones, ¿cuáles son progresiones geométricas? Escribe tres términos más en cada una y también su término general.**

a) 32, 16, 8, 4, 2, … **b) 1; 0,1; 0,01; 0,001; …**

c) 1, 4, 9, 16, 25, … **d)** $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, \dots$

a) Es una progresión geométrica con $a_1 = 32$ y $r = \frac{1}{2}$.

$$a_6 = 1,\ a_7 = \frac{1}{2},\ a_8 = \frac{1}{4};\ a_n = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2^5}{2^{n-1}} = 2^{6-n}$$

b) No es una progresión geométrica; $b_6 = 36$, $b_7 = 49$, $b_8 = 64$, $b_n = n^2$.

c) Es una progresión geométrica con $c_1 = 1$ y $r = 0{,}1$.

$c_6 = 0{,}00001$; $c_7 = 0{,}000001$; $c_8 = 0{,}0000001$; $c_n = 1 \cdot 0{,}1^{n-1} = 0{,}1^{n-1}$

d) Es una progresión geométrica con $d_1 = \sqrt{2}$ y $r = \sqrt{2}$.

$d_6 = 8$; $d_7 = 8\sqrt{2}$; $d_8 = 16$; $d_n = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^{n-1} = (\sqrt{2})^n$.

11 **Calcula la suma de los 25 primeros términos de las siguientes progresiones geométricas y halla la suma de los infinitos términos en los casos que sea posible:**

a) $a_1 = 32,\ r = \frac{1}{2}$ **b)** $a_1 = 10,\ r = \frac{1}{10}$

c) $a_1 = 2^{-10},\ r = 2$ **d)** $a_1 = -5,\ r = -\frac{1}{4}$

$$S_{25} = \frac{a_{25} \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{a_1 \cdot r^{25} - a_1}{r-1},\quad S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$

a) $S_{25} = \dfrac{32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{25} - 32}{\frac{1}{2} - 1} = 63{,}99999809 \approx 64 \qquad S_\infty = \dfrac{a_1}{1-r} = \dfrac{32}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{32}{\frac{1}{2}} = 64$

b) $S_{25} = \dfrac{10 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{25} - 10}{\frac{1}{10} - 1} \approx 11{,}1 \approx \dfrac{100}{9} \qquad S_\infty = \dfrac{a_1}{1-r} = \dfrac{10}{1 - \frac{1}{10}} = \dfrac{100}{9} = 11{,}1$

c) $S_{25} = \dfrac{2^{-10} \cdot 2^{25} - 2^{-10}}{2-1} = 32\,767{,}99902 \approx 32\,768$

No se puede calcular S_∞ porque $|r|$ no es mayor que 1.

d) $S_{25} = \dfrac{(-5) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{25} - (-5)}{-\frac{1}{4} - 1} \approx -4 \qquad S_\infty = \dfrac{-5}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = \dfrac{-5}{\frac{5}{4}} = -4$

Página 65

Suma de potencias

12 **a) Demuestra que:**

$2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 = 4(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2)$

b) Calcula la suma de los cuadrados de los 50 primeros números pares.

c) Calcula la suma de los cuadrados de todos los números impares menores que 100.

a) $2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 = (2 \cdot 1)^2 + (2 \cdot 2)^2 + (2 \cdot 3)^2 + (2 \cdot 4)^2 + (2 \cdot 5)^2 =$

$$= 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2)$$

b) $2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 98^2 + 100^2 = 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 49^2 + 50^2) =$

$$= 2^2 \frac{50 \cdot 51 \cdot 101}{6} = 171\,700$$

c) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 99^2 =$

$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 99^2 + 100^2) - (2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 98^2 + 100^2) =$

$= \dfrac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} - 171\,700 = 338\,350 - 171\,700 = 166\,650$

13 **Halla la suma siguiente:**

$$\mathbf{21^3 + 22^3 + 23^3 + \dots + 37^3 + 38^3 + 39^3 + 40^3}$$

$21^3 + \dots + 40^3 = (1^3 + 2^3 + \dots + 20^3 + 21^3 + \dots + 40^3) - (1^3 + \dots + 20^3) =$

$$= \frac{40^2 \cdot 41^2}{4} - \frac{20^2 \cdot 21^2}{4} = 672\,400 - 44\,100 = 628\,300$$

Límite de una sucesión

14 **Calcula los términos a_{10}, a_{100} y $a_{1\,000}$, en cada sucesión e indica cuál es su límite:**

a) $a_n = \dfrac{1}{n-1}$ **b)** $a_n = \dfrac{2n+5}{n}$

c) $a_n = \dfrac{5}{n} - 1$ **d)** $a_n = 3 - 7n$

a) $a_{10} = 0,\widehat{1}$; $a_{100} = 0,\widehat{01}$; $a_{1\,000} = 0,\widehat{001}$

lím $a_n = 0$

b) $a_{10} = 2,5$; $a_{100} = 2,05$; $a_{1\,000} = 2,005$

lím $a_n = 2$

c) $a_{10} = -0,5$; $a_{100} = -0,95$; $a_{1\,000} = -0,995$

lím $a_n = -1$

d) $a_{10} = -6,7$; $a_{100} = -697$; $a_{1\,000} = -6\,997$

lím $a_n = -\infty$

15 **Halla algunos términos muy avanzados de las siguientes sucesiones e indica cuál es su límite:**

a) $a_n = 5n - 10$ **b)** $b_n = 100 - n$

c) $c_n = \dfrac{n-3}{n+1}$ **d)** $d_n = \dfrac{n}{2n+1}$

a) $a_{10} = 40$; $a_{100} = 490$; $a_{1\,000} = 4\,990$

$lím\ a_n = +\infty$

b) $b_{10} = 90$; $b_{100} = 0$; $b_{1\,000} = -900$

$lím\ b_n = -\infty$

c) $c_{10} = 0{,}63$; $c_{100} \approx 0{,}9603$; $c_{1\,000} \approx 0{,}996$

$lím\ c_n = 1$

d) $d_{10} \approx 0{,}476$; $d_{100} \approx 0{,}498$; $d_{1\,000} \approx 0{,}4998$

$lím\ d_n = 0{,}5 = \dfrac{1}{2}$

16 **Estudia el comportamiento de las siguientes sucesiones para términos muy avanzados e indica cuál es el límite de cada una de ellas:**

a) $a_n = 3n^2 - 10$ **b)** $b_n = 3n - n^2$

c) $c_n = 10 - 5n + n^2$ **d)** $d_n = (1 - 2n)^2$

e) $e_n = (4 - n)^3$ **f)** $f_n = 1 - (n + 2)^2$

a) $a_{10} = 290$; $a_{100} = 29\,990$; $a_{1\,000} = 2\,999\,990$

$lím\ a_n = +\infty$

b) $b_{10} = -70$; $b_{100} = -9\,700$; $b_{1\,000} = -997\,000$

$lím\ b_n = -\infty$

c) $c_{10} = 60$; $c_{100} = 9\,510$; $c_{1\,000} = 995\,010$

$lím\ c_n = +\infty$

d) $d_{10} = 361$; $d_{100} = 39\,601$; $d_{1\,000} = 3\,996\,001$

$lím\ d_n = +\infty$

e) $e_{10} = -216$; $e_{100} = -884\,736$; $e_{1\,000} = -988\,047\,936$

$lím\ e_n = -\infty$

f) $f_{10} = -143$; $f_{100} = -10\,403$; $f_{1\,000} = -1\,004\,003$

$lím\ f_n = -\infty$

17 **Estudia el comportamiento de las siguientes sucesiones para términos muy avanzados e indica cuál es el límite de cada una de ellas:**

a) $a_n = \dfrac{1}{3n}$

b) $b_n = \dfrac{5}{3n+2}$

c) $c_n = \dfrac{3}{n+1}$

d) $d_n = \dfrac{3n}{n^2+1}$

e) $e_n = \dfrac{1}{n^2}$

f) $f_n = \dfrac{-100}{n^2}$

g) $g_n = (-1)^n$

h) $h_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$

a) $a_{10} = 0{,}0\widehat{3}$; $a_{100} = 0{,}00\widehat{3}$; $a_{1\,000} = 0{,}000\widehat{3}$

$\text{lím } a_n = 0$

b) $b_{10} = 0{,}15625$; $b_{100} = 0{,}01656$; $b_{1\,000} = 0{,}00167$

$\text{lím } b_n = 0$

c) $c_{10} = 0{,}\widehat{27}$; $c_{100} = 0{,}\widehat{0297}$; $c_{1\,000} = 0{,}\widehat{002997}$

$\text{lím } c_n = 0$

d) $d_{10} = 0{,}297$; $d_{100} = 0{,}029997$; $d_{1\,000} = 0{,}002999997$

$\text{lím } d_n = 0$

e) $e_{10} = 0{,}01$; $e_{100} = 0{,}0001$; $e_{1\,000} = 0{,}000001$

$\text{lím } e_n = 0$

f) $f_{10} = -1$; $f_{100} = -0{,}01$; $f_{1\,000} = -0{,}0001$

$\text{lím } f_n = 0$

g) $g_{10} = 1$; $g_{101} = -1$; $g_{1\,000} = 1$; $g_{10\,001} = -1$

La sucesión no tiene límite.

h) $h_{10} = 0{,}0909$; $h_{100} = 0{,}0099$; $h_{1\,000} = 0{,}000999$; $h_{1\,001} = -0{,}000999$

$\text{lím } h_n = 0$

PARA RESOLVER

18 **Calcula el 15.° término en la siguiente progresión:**

3; 2,7; 2,4; 2,1; …

Es una progresión aritmética con $a_1 = 3$ y $d = -0{,}3$.

Por tanto, $a_{15} = a_1 + 14d = 3 - 0{,}3 \cdot 14 = 3 - 4{,}2 = -1{,}2$.